УДК 539.3

РАЗРУШЕНИЕ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН В РЕЗУЛЬТАТЕ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ВОЛОКОН

Р.А. Каюмов, А.М. Шакирова

Аннотация

Рассматривается растяжение образца, представляющего собой склеенные под углом 0° и 90° градусов слои волокнистого композиционного материала. Исследуется явление сжатия слоев, вызванного эффектом Пуассона, и задача разрушения элементов слоев в результате потери устойчивости волокон.

Ключевые слова: Волокнистые композиционные материалы, упругие характеристики, формула смеси, потеря устойчивости, метод конечных элементов.

Рассматривается задача о растяжении образца вдоль оси z, образованного из склеенных под углом 0° и 90° градусов (см. рис. 1, 2) слоев волокнистого композиционного материала (ВКМ).

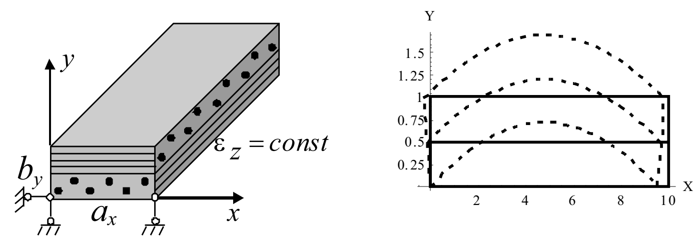

Рис. 1. Образец, образованный наложением двух ортотропных армированных материалов под углами 0° и 90°; сечение образца до и после деформации

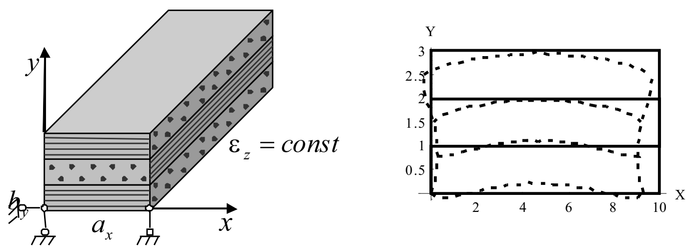

Рис. 2. Трехслойный образец, образованный наложением ортотропных армированных материалов под углами 0° и 90°; сечение образца до и после деформации

ВКМ представляет собой или матрицу (например, эпоксидную смолу), перекрестно армированную прямолинейными волокнами, или тканый композит, состоящий из перпендикулярно переплетенных волокон (нитей), залитых матрицей.

Объемы нитей, расположенных вдоль и поперек ВКМ, варьируются. Для ортотропного материала при определении упругих характеристик применим формулы смесей. Для всего композита удельный объем матрицы будем обозначать через ϑ, удельный объем арматуры вдоль образца (продольных нитей) будем обозначать через $\vartheta_f^{0^\circ}$, поперек образца (поперечных нитей) будем обозначать через $\vartheta_f^{90^\circ}$. Здесь и далее параметры, относящиеся к матрице будут снабжаться индексом m, а параметры, относящиеся к волокнам, будут снабжаться индексом f. Коэффициенты Пуассона для арматуры обозначим через ν_f , для матрицы через ν , модули Юнга через E_f, E соответственно. В разных направлениях они, вообще говоря, будут разными, поэтому могут снабжаться соответствующими индексами 0° и 90° . Но для простоты считаем и матрицу, и волокна изотропными.

Условно производство материала разбиваем на два этапа. На первом, смешивая всю матрицу с волокнами, уложенными под углом 0° к оси z , получаем однонаправленный композит, который для простоты будем называть начальным и снабжать его параметры индексом I.

Сначала гомогенизируем смесь матрицы и продольных волокон. Объем начального слоя составит $\vartheta_f^{0^\circ} + \vartheta_m$ всего объема композита. Тогда удельные объемы арматуры и матрицы в начальном слое будут:

$$\vartheta_f^I = \frac{\vartheta_f^{0^\circ}}{\vartheta_f^{0^\circ} + \vartheta_m}, \quad \vartheta_m^I = 1 - \vartheta_f^I \ .$$

По формулам смесей получим соотношения для модулей упругости начального гомогенизированного слоя:

$$E_z^I = E_f \vartheta_f^I + E_m \vartheta_m^I \ ,$$

$$\left(E_x^I\right)^{-1} = \left(E_f^I\right)^{-1} \vartheta_f^I + \left(E_m\right)^{-1} \vartheta_m^I \ .$$

Считая распределение волокон по сечению (в плоскости xy) однородным, получим трансверсально-изотропный материал, следовательно,

$$E_x^I = E_y^I \ .$$

Аналогичные выражения можно получить для коэффициентов Пуассона. Во-первых, имеем известное соотношение для коэффициента Пуассона при удлинении вдоль оси z:

$$\nu_{xz}^I = \nu_f \vartheta_f^I + \nu_m \vartheta_m^I \ .$$

Снова считая материал трансверсально-изотропным, получим, что

$$\nu_{yz}^I = \nu_{xz}^I \ .$$

В плоскости xy в силу малой деформативности волокон и трансверсальной изотропии можно принять, что

$$\nu_{yx}^I \simeq \nu_{xy}^I \simeq \nu_m \vartheta_m^I \ .$$

Остальные коэффициенты Пуассона находим из соотношений симметрии упругих характеристик:

$$\frac{E_z^I}{\nu_{xz}^I} = \frac{E_x^I}{\nu_{zx}^I} \ , \qquad \frac{E_z^I}{\nu_{yz}^I} = \frac{E_y^I}{\nu_{zy}^I} \ .$$

Далее рассмотрим второй этап. Он состоит из внедрения поперечных нитей (которые составляют $\vartheta_f^{90^\circ}$ всего объема композита) в слой, полученный на первом этапе. Тогда для этих нитей матрицей служит гомогенизированный на первом этапе слой. Таким образом, получим

$$\vartheta_f^{II} = \vartheta_f^{90^\circ}, \quad \vartheta_m^{II} = 1 - \vartheta_f^{II} \ ,$$

$$E_x^{II} = E_f \vartheta_f^{II} + E_x^I \vartheta_m^{II} \ ,$$

$$\left(E_z^{II}\right)^{-1} = \left(E_f\right)^{-1} \vartheta_f^{II} + \left(E_z^I\right)^{-1} \vartheta_m^{II} \ ,$$

$$\left(E_y^{II}\right)^{-1} = \left(E_f\right)^{-1} \vartheta_f^{II} + \left(E_y^I\right)^{-1} \vartheta_m^{II} \ .$$

Аналогично изложенному выше получим соотношения для коэффициентов Пуассона:

$$\nu_{zx}^{II} = \nu_f \vartheta_f^{II} + \nu_{zx}^I \vartheta_m^{II} \ ,$$

$$\nu_{yx}^{II} = \nu_f \vartheta_f^{II} + \nu_{yx}^I \vartheta_m^{II} \ .$$

В плоскости снова в силу малой деформативности волокон можно принять, что

$$\nu_{zy}^{II} = \nu_{zy}^I \vartheta_m^{II} \ .$$

Остальные коэффициенты Пуассона вновь находим из соотношений симметрии упругих характеристик:

$$\frac{E_z^{II}}{\nu_{xz}^{II}} = \frac{E_x^{II}}{\nu_{zx}^{II}} \ , \qquad \frac{E_z^{II}}{\nu_{yz}^{II}} = \frac{E_y^{II}}{\nu_{zy}^{II}} \ , \qquad \frac{E_x^{II}}{\nu_{yx}^{II}} = \frac{E_y^{II}}{\nu_{xy}^{II}} \ .$$

Стеклопластик относится к ортотропным материалам, для которых обобщенный закон Гука можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_x = \frac{1}{E_x}\sigma_x - \frac{\nu_{xy}}{E_y}\sigma_y - \frac{\nu_{xz}}{E_z}\sigma_z && \gamma_{xy} = \tfrac{\tau_{xy}}{G_{xy}} \\
&\varepsilon_y = -\frac{\nu_{yx}}{E_x}\sigma_x + \frac{1}{E_y}\sigma_y - \frac{\nu_{yz}}{E_z}\sigma_z && \gamma_{yz} = \tfrac{\tau_{yz}}{G_{yz}} \\
&\varepsilon_z = -\frac{\nu_{zx}}{E_x}\sigma_x - \frac{\nu_{zy}}{E_y}\sigma_y + \frac{1}{E_z}\sigma_z && \gamma_{zx} = \tfrac{\tau_{zx}}{G_{zx}}
\end{aligned} \tag{1}$$

В этих равенствах E_x, E_y, E_z – модули упругости в направлении осей O_x, O_y, O_z; G_{xy}, G_{yz}, G_{zx} – модули сдвига в плоскостяхO_{xy}, O_{yz}, O_{zx}; ν_{xy}, ν_{yx}, ν_{yz}, ν_{zy}, ν_{zx}, ν_{xz} – коэффициенты Пуассона. Первый индекс у коэффициентов Пуассона обозначает направление поперечного сужения, второй – направление действия нормального напряжения, вызывающее поперечное сужение.

Постоянные, характеризующие свойства материала, обладают свойством взаимности, поэтому можно получить соотношения, связывающие между собой упругие характеристики:

$$\frac{\nu_{xy}}{E_y} = \frac{\nu_{yx}}{E_x}, \qquad \frac{\nu_{xz}}{E_z} = \frac{\nu_{zx}}{E_x}, \qquad \frac{\nu_{yz}}{E_z} = \frac{\nu_{zy}}{E_y},$$

тогда соотношения (1) примут вид:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_x = \frac{1}{E_x}\sigma_x - \frac{\nu_{xy}}{E_y}\sigma_y - \frac{\nu_{xz}}{E_x}\sigma_z && \gamma_{xy} = \tfrac{\tau_{xy}}{G_{xy}} \\
&\varepsilon_y = -\frac{\nu_{yx}}{E_y}\sigma_x + \frac{1}{E_y}\sigma_y - \frac{\nu_{yz}}{E_y}\sigma_z && \gamma_{yz} = \tfrac{\tau_{yz}}{G_{yz}} \\
&\varepsilon_z = -\frac{\nu_{zx}}{E_x}\sigma_x - \frac{\nu_{zy}}{E_y}\sigma_y + \frac{1}{E_z}\sigma_z && \gamma_{zx} = \tfrac{\tau_{zx}}{G_{zx}}
\end{aligned} \tag{2}$$

Если рассмотреть процесс растяжения образца по оси z, тогда $\varepsilon_z = const = C$, а из третьего выражения соотношения (2)

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu_{zx}}{E_x}\sigma_x - \frac{\nu_{zy}}{E_y}\sigma_y + \frac{1}{E_z}\sigma_z = C. \tag{3}$$

Из соотношения (3) выражаем σ_z:

$$\sigma_z = CE_z + \frac{\nu_{zx}}{E_x}E_z\sigma_x + \frac{\nu_{zy}}{E_y}E_z\sigma_y. \tag{4}$$

Полученное величину подставляем в первое и второе выражения соотношения (2), откуда получим

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E_x}\sigma_x - \dfrac{\nu_{xy}}{E_y}\sigma_y - \dfrac{\nu_{zx}}{E_x}\left(CE_z + \dfrac{\nu_{zx}}{E_x}E_z\sigma_x + \dfrac{\nu_{zy}}{E_y}E_z\sigma_y\right) \\ \varepsilon_y = -\dfrac{\nu_{xy}}{E_y}\sigma_x + \dfrac{1}{E_y}\sigma_y - \dfrac{\nu_{zy}}{E_y}\left(CE_z + \dfrac{\nu_{zx}}{E_x}E_z\sigma_x + \dfrac{\nu_{zy}}{E_y}E_z\sigma_y\right) \end{cases} \tag{5}$$

Решая данную систему уравнений, получим выражения для σ_x и σ_y , которые можно записать в виде

$$\begin{cases} \sigma_x = D_{11}\varepsilon\varepsilon_x + D_{12}\varepsilon_y + \sigma_{xconst} \\ \sigma_y = D_{21}\varepsilon_x + D_{22}\varepsilon_y + \sigma_{yconst} \\ \tau_{xy} = D_{33}\gamma_{xy} \end{cases} \tag{6}$$

где

$$\begin{cases} D_{11} = \dfrac{-E_x^2(E_y - E_z\nu_{zy}^2)}{-E_xE_y + E_x^2\nu_{xy}^2 + E_yE_z\nu_{zx}^2 + 2E_xE_z\nu_{xy}\nu_{zx}\nu_{zy} + E_xE_z\nu_{zy}^2,} \\ D_{12} = \dfrac{-E_x^2E_y\nu_{xy} + E_xE_yE_z\nu_{zx}\nu_{zy}}{-E_xE_y + E_x^2\nu_{xy}^2 + E_yE_z\nu_{zx}^2 + 2E_xE_z\nu_{xy}\nu_{zx}\nu_{zy} + E_xE_z\nu_{zy}^2,} \\ D_{21} = \dfrac{-E_y(E_x^2\nu_{xy} + E_xE_z\nu_{zx}\nu zy)}{-E_xE_y + E_x^2\nu_{xy}^2 + E_yE_z\nu_{zx}^2 + 2E_xE_z\nu_{xy}\nu_{zx}\nu_{zy} + E_xE_z\nu_{zy}^2,} \\ D_{22} = \dfrac{-E_y(E_xE_y - E_yE_z\nu_{zx}^2)}{-E_xE_y + E_x^2\nu_{xy}^2 + E_yE_z\nu_{zx}^2 + 2E_xE_z\nu_{xy}\nu_{zx}\nu_{zy} + E_xE_z\nu_{zy}^2,} \\ D_{33} = G_{xy}, \\ \sigma_{xconst} = \dfrac{CE_xE_yE_z\nu_{zx} + CE_x^2E_z\nu_{xy}\nu_{zy}}{-E_xE_y + E_x^2\nu_{xy}^2 + E_yE_z\nu_{zx}^2 + 2E_xE_z\nu_{xy}\nu_{zx}\nu_{zy} + E_xE_z\nu_{zy}^2.} \\ \sigma_{yconst} = \dfrac{-E_y\left(CE_xE_z\nu_{xy}\nu_{zx} + CE_xE_z\nu_{zy}\right)}{-E_xE_y + E_x^2\nu_{xy}^2 + E_yE_z\nu_{zx}^2 + 2E_xE_z\nu_{xy}\nu_{zx}\nu_{zy} + E_xE_z\nu_{zy}^2,} \end{cases} \tag{7}$$

Для анализа напряженно деформированного состояния используется принцип виртуальной работы в приращениях:

$$\iiint\limits_V \{\triangle\sigma\}^T \delta\{\triangle\varepsilon\}\,dV = \iint\limits_{S_\sigma} \{\triangle P\}^T \delta\{\triangle u\}\,dS, \tag{8}$$

где P – вектор поверхностной нагрузки, который в данном случае равен нулю. Тогда получим

$$\iiint\limits_V \{\triangle\sigma\}^T \delta \{\triangle\varepsilon\} \, dV = 0. \tag{9}$$

Если учесть, что

$$\{\triangle\sigma\} = [D]\{\triangle\varepsilon\} + \{\triangle\sigma_{const}\} = [D][B]\{\triangle U\} + \{\triangle\sigma_{const}\},$$

$$\delta\{\varepsilon\}^T = \delta u \{u\}^T [B]^T,$$

то из соотношения (9) получим:

$$\iiint\limits_V [B]^T [D][B]\{u\} \, dV = \iiint\limits_V [B]^T \{\sigma_{const}\} \, dV.$$

Дискретизация задачи по пространственным координатам осуществляется методом конечных элементов, в качестве которых приняты шестиузловые треугольные элементы с квадратичной аппроксимацией перемещений.

После решения макрозадачи и определения полей напряжений в слоях, на втором этапе решается задача разрушения элементов $\triangle V$ слоев в результате потери устойчивости волокон. При растяжении вдоль оси z, образец удлиняется, а в поперечном направлении пытается укоротиться. В нижней части волокна будут сопротивляться укорочению и может произойти потеря их устойчивости.

Рассмотрим малый объем $\triangle V$ из нижнего слоя образца (см. рис. 3). Он будет работать на сжатие (сжимающие силы определяются на первом этапе). Решив задачу для малого элемента $\triangle V$ аналогично изложенному выше, находим максимальные напряжения сжатия волокна и сравниваем их с критическим напряжением:

$$\sigma_{max}^{volokna} \le \sigma_{critical}$$

$$\sigma_{critical} = \sqrt{2E_{matr}\, k_{matr}\, J_{volokna}}\, / A_{volokna},$$

где E_{matr} – модуль упругости матрицы, k_{matr} – коэффициент постели матрицы, $A_{volokna} = \pi r^2$ – площадь сечения волокна, $J_{volokna} = \pi r^4/4$ – момент инерции волокна.

Условие потери устойчивости волокна считается условием разрушения.

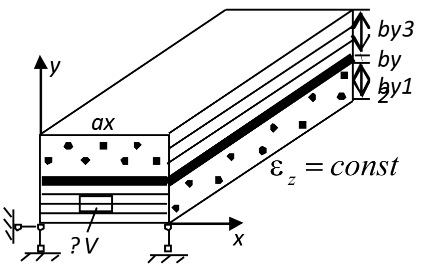

Рис. 3. Трехслойный образец

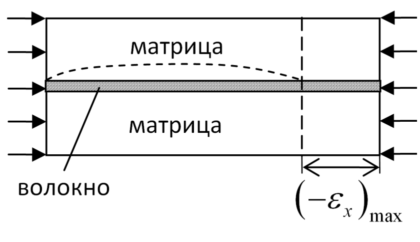

Рис. 4. Элементарная площадка dV нижнего слоя ВКМ

Коэффициент постели матрицы k_{matr} находиться из эксперимента. Для этого образец доводиться до потери устойчивости волокон. Усилие сжатия образца (см. рис. 4) принимается за критическое, тогда из известного соотношения

$$P_{critical}^{exp} = \sqrt{2E_{matr}\, k_{matr}\, J_{volokna}}$$

$$k_{matr} = \frac{P^{exp}_{critical}}{2E_{matr}J_{volokna}}.$$

Summary

R.A. Kayumov, A.M. Shakirova. DESTRUCTION OF MULTILAYERED PLATES AS A RESULT OF LOSS OF STABILITY OF FIBRES. Stretching of the sample representing stuck together at an angle 0° and 90° degrees layers of a fibrous composite material is considered. Forces of compression of layers are defined and the problem of destruction of the elements of layers as a result of loss of stability of fibers is solved. **Key words:** Fibrous composite materials, elastic characteristics, mix formula, stability loss, method of final elements.

Сведения о каждом из авторов статьи

Р.А. Каюмов – доктор физико-математических наук, профессор, Казанский государственный архитектурно-строительный университет (КазГАСУ), г. Казань, ул. Зеленая, д.1.

E-mail: *kayumov@rambler.ru*

А.М. Шакирова – кандидат физико-математических наук, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н.Туполева (КНИТУ-КАИ), г. Казань, ул. К.Маркса, д.10.

E-mail: *shakirovaalsou@gmail.com*